

УДК 669.184

## **РОЗРАХУНОК ОДНОФАКТОРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕТАЛУРГІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТУ АНАЛІЗУ ДАНИХ СЕРЕДОВИЩА MS EXCEL**

*В. М. Рибак*

*Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»*

*Розглянуто етапи розрахунку однофакторних математичних моделей металургійних процесів за допомогою пакету аналізу даних середовища MS Excel*

*Рассмотрены этапы расчета однофакторных математических моделей металлургических процессов при помощи пакета анализа данных среды MS Excel*

*Stages of calculation of one-factorial mathematical models of metallurgical processes by means of the data analysis package of the MS Excel are considered*

### **Вступ**

Основна задача будь-якого дослідження полягає в тому, щоб на основі експериментальних даних деякого процесу отримати формулу (математичну модель), яка б найкраще описувала цей процес.

Однофакторна математична модель являє собою залежність одного відгуку (вихідного параметру) від одного фактору (вхідного параметру) при незмінності інших факторів (параметрів). Наприклад: залежність відносного подовження сплаву від кількості модифікатора при постійних температурах модифікування, розливання часу витримки і т.д.

Процес розрахунку будь-якої математичної моделі є доволі трудомісткою роботою, особливо при наявності великої кількості експериментальних даних. Але за допомогою відомого пакету MS Excel і деяким навичкам роботи на комп'ютері процес розрахунку математичних моделей будь-яких металургійних (і не тільки металургійних) процесів може зайняти усього декілька хвилин. Окрім розрахунку математичної моделі MS Excel дозволяє також перевірити її адекватність (відповідність).

### **Постановка задачі дослідження**

Задача даної роботи полягає в розгляді етапів розрахунку однофакторних математичних моделей металургійних процесів за допомогою пакету аналізу даних середовища MS Excel на прикладі модифікування ливарного алюмінієвого сплаву АК9ч.

В результаті деякого дослідження були отримані залежності тимчасового опору розриву алюмінієвого сплаву АК9ч від кількості модифікатора (табл. 1).

**Таблиця 1. Результати досліджень**

| № дослідження               | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   |
|-----------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Кількість модифікатора, %   | 0   | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 |
| Тимчасовий опір розриву 1,% | 153 | 163 | 185 | 183 | 175 | 168 | 156 | 159 |
| Тимчасовий опір розриву 2,% | 162 | 164 | 177 | 180 | 176 | 164 | 163 | 157 |
| Тимчасовий опір розриву 3,% | 156 | 174 | 181 | 186 | 180 | 160 | 158 | 155 |

Як видно із наведеної таблиці, кількість експериментальних точок дорівнює 8, а кількість паралельних досліджень – 3.

Задача – знайти математичну модель даного металургійного процесу, перевірити її на адекватність та спростити у випадку необхідності і можливості.

### **Методика проведення експериментів**

Порядок розрахунку будь-якої однофакторної математичної моделі складається з наступних етапів:

1) Проведення досліджень деякого однофакторного процесу з метою отримання декількох експериментальних точок. На якість моделювання впливає загальна кількість таких точок та кількість паралельних досліджень. Чим більшою буде кількість експериментальних точок та кількість паралельних досліджень в кожній точці тим модель буде кращою. В будь-якому випадку кількість експериментальних точок не повинна бути меншою 5, а кількість паралельних досліджень в кожній точці – не менше 3.

2) Розрахунок математичного очікування. На цьому етапі необхідно розрахувати математичні очікування (середні значення) відгуків паралельних досліджень кожної із точок і побудувати графік залежності вихідного параметру від вхідного.

3) Розрахунок довірчих інтервалів. Задавшись деяким значенням права на похибку необхідно розрахувати довірчі інтервали кожної із точок і також нанести їх на графіку.

4) Вибір загального вигляду математичної моделі. На цьому етапі за допомогою побудованого графіку необхідно визначити загальний вид функції (математичної моделі). У більшості випадків будь-яку складну

функцію можна представити у вигляді суми простих. При визначенні загального вигляду математичної моделі слід пам'ятати про те, що загальна кількість коефіцієнтів моделі не повинна перевищувати кількість експериментальних точок. Це означає, що якщо кількість експериментальних точок дорівнює 5, то математична модель не може мати більше 5 коефіцієнтів, включаючи вільний коефіцієнт.

5) Розрахунок за допомогою одного із чисельних методів коефіцієнтів обраної математичної моделі. В більшості випадків для розрахунку коефіцієнтів математичної моделі використовують метод найменших квадратів.

6) Перевірка адекватності математичної моделі. На цьому етапі для кожної точки розраховується математичне значення вихідного параметру за допомогою отриманої математичної моделі, яке порівнюється з відповідним експериментальним значенням. Критеріями адекватності математичної моделі є значення коефіцієнтів Стюдента, Фішера а також проходження розрахованої математичної кривої в межах довірчих інтервалів. У випадку неадекватності отриманої математичної моделі необхідно обрати новий її вигляд і виконати пункти 6, 7 ще раз.

7) Спрощення математичної моделі. У випадку отримання адекватної, але складної математичної моделі її необхідно спростити шляхом виключення деяких простих функцій. Виключення функцій (коефіцієнтів) відбувається за допомогою критеріїв Стюдента. Після виключення деякої функції (коефіцієнта) операції 5, 6, 7 слід повторити.

### **Результати досліджень**

Розрахунок математичної моделі слід починати з завантаження MS Excel та перевірки встановлення в ньому пакету „Аналіз даних”. Пакет „Аналіз даних” повинен знаходитися в меню „Сервіс”. Якщо даного пакету в меню „Сервіс” знайдено не буде, то слід запустити підменю „Надбудови” і поставити відповідну галочку на надбудові „Аналіз даних”. Після цього можливі два варіанти: або пакет „Аналіз даних” з'явиться в меню „Сервіс”, або MS Excel запропонує його встановити з диска. В другому випадку необхідно вставити відповідний диск з програмою MS Excel і підтвердити запропоновані дії. Після появи в меню „Сервіс” пакету „Аналіз даних” можна починати розрахунок математичної моделі.

На першому етапі на новому аркуші слід створити таблицю з експериментальними даними у вигляді, представленому на рис.1. Для наочності вхідний фактор (кількість модифікатора) позначимо  $X$ , а вихідний фактор (тимчасовий опір на розрив) позначимо  $Y_1, Y_2, Y_3$  (по кількості паралельних досліджень). Середнє арифметичне (математичне

очікування) позначимо  $Y$ . Ще два стовпчика додамо для розрахунку стандартного відхилення та довірчого інтервалу.

Для розрахунку середнього арифметичного, стандартного відхилення та довірчого інтервалу у відповідні комірки введемо формули і скопіюємо їх для усіх восьми точок:

| F2 |   | fx =CPЗНАЧ(C2:E2) |                     |     |     |     |                       |                   |  |
|----|---|-------------------|---------------------|-----|-----|-----|-----------------------|-------------------|--|
|    | A | B                 | C                   | D   | E   | F   | G                     | H                 |  |
| 1  | № | X                 | Y1                  | Y2  | Y3  | Y   | Стандартне відхилення | Довірчий інтервал |  |
| 2  | 1 | 0                 | 153                 | 162 | 156 | 157 | 4,582575695           | 4,35187324        |  |
| 3  | 2 | 0,2               | 163                 | 164 | 174 | 167 | 6,08276253            | 5,776535565       |  |
| 4  | 3 | 0,4               | 185                 | 177 | 181 | 181 | 4                     | 3,798626388       |  |
| 5  | 4 | 0,6               | 183                 | 180 | 186 | 183 | 3                     | 2,848969791       |  |
| 6  | 5 | 0,8               | 175                 | 176 | 180 | 177 | 2,645751311           | 2,512555186       |  |
| 7  | 6 | 1                 | 168                 | 164 | 160 | 164 | 4                     | 3,798626388       |  |
| 8  | 7 | 1,2               | 156                 | 163 | 158 | 159 | 3,605551275           | 3,424035554       |  |
| 9  | 8 | 1,4               | 159                 | 157 | 155 | 157 | 2                     | 1,899313194       |  |
| 10 |   |                   |                     |     |     |     |                       |                   |  |
| 11 |   |                   | =CPЗНАЧ(C9:E9)      |     |     |     | =ДОВЕРИТ(0,1;G9;3)    |                   |  |
| 12 |   |                   | =СТАНДОТКЛОН(C9:E9) |     |     |     |                       |                   |  |

Рис. 1 Введення експериментальних даних в таблицю MS Excel

По отриманим даним побудуємо графік залежності середніх значень тимчасового опору на розрив від кількості модифікатора і позначимо на ньому довірчі інтервали.

Для побудови графіка необхідно вибрати команду меню „Вставка-діаграма-графік”. Потім необхідно натиснути кнопку „Далі” і перейти на ярлик „Ряд”. На ярлику „Ряд” необхідно натиснути кнопку „Додати” і ввести в графу „Значення” діапазон комірок F2:F9 а в графу „Підписи під X” – діапазон B9:B10. Після цього необхідно натиснути на кнопку „Готово”.

Отриманий графік необхідно відформатувати. Для форматування необхідно двічі клацнути по одній із точок. В меню що відкриється необхідно прибрати лінію і залишити тільки маркери, поміняти колір фону, додати вертикальну сітку. Перейшовши на ярлик „Y-погрішності” встановити планки погрішностей – обидві, величину погрішності – користувача. В додатні і від’ємні погрішності ввести діапазон комірок H2:H9.

В результаті повинен з’явитися графік, представлений на рисунку 2.

На наступному етапі необхідно обрати загальний вид математичної моделі і створити таблицю із набору простих функцій, коефіцієнти яких

необхідно розрахувати (рис.3).

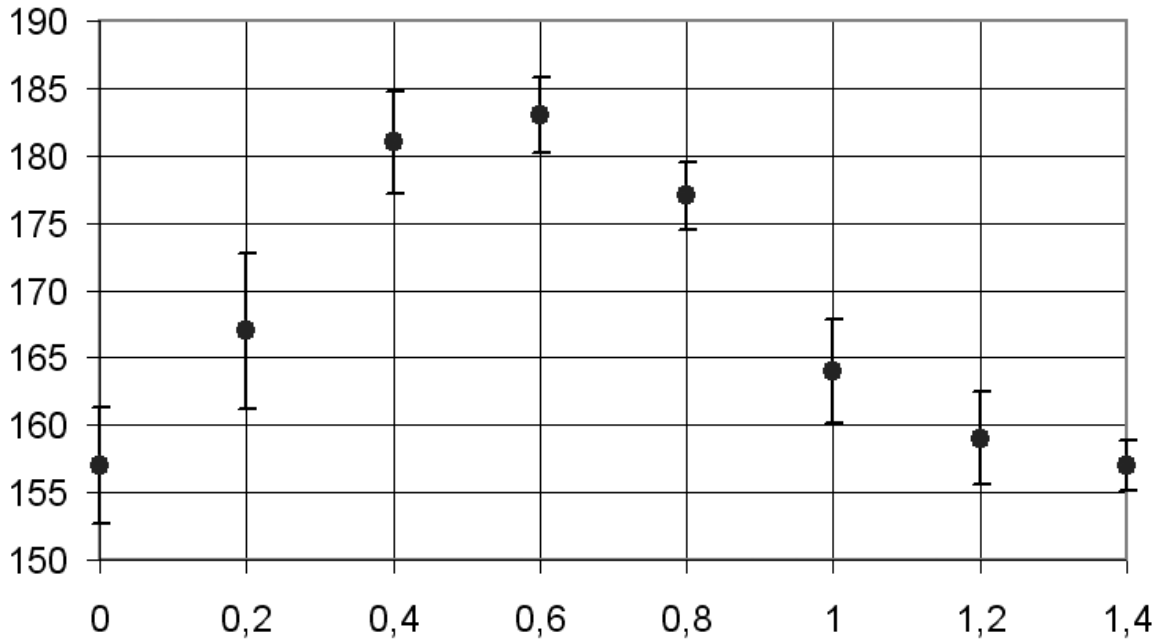


Рис.2 Графік у вигляді точок

У відповідні комірки необхідно набрати формули розрахунку простих функцій і скопіювати їх для усіх восьми точок.

| fx =L2^2 |   |   |     |     |       |          |       |
|----------|---|---|-----|-----|-------|----------|-------|
|          | I | J | K   | L   | M     | N        | O     |
| i        |   | № | Y   | X   | X^2   | e^X      | X^3   |
| 24       |   | 1 | 157 | 0   | 0     | 1        | 0     |
| 65       |   | 2 | 165 | 0,2 | 0,04  | 1,221403 | 0,008 |
| 88       |   | 3 | 182 | 0,4 | 0,16  | 1,491825 | 0,064 |
| 91       |   | 4 | 183 | 0,6 | 0,36  | 1,822119 | 0,216 |
| 86       |   | 5 | 177 | 0,8 | 0,64  | 2,225541 | 0,512 |
| 88       |   | 6 | 164 | 1   | 1     | 2,718282 | 1     |
| 54       |   | 7 | 159 | 1,2 | 1,44  | 3,320117 | 1,728 |
| 94       |   | 8 | 157 | 1,4 | 1,96  | 4,0552   | 2,744 |
|          |   |   |     |     | =L9^2 | =EXP(L9) | =L9^3 |

Рис.3 Загальний вид математичної моделі

Далі необхідно вибрати в меню команди „Сервіс - Аналіз даних - Регресія”. В графу „Вхідний інтервал Y” ввести діапазон комірок K2:K9. В графу „Вхідний інтервал X” ввести діапазон комірок L2:O9 і натиснути на кнопку „Ок”. В документі Ехсел з’явиться новий аркуш з розрахованими коефіцієнтами (рис.4).

|    |                |                     |                           |                     |
|----|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|
| 16 |                | <i>Кoeffициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> |
| 17 | Y-пересечение  | -1074,783351        | 626,6094657               | -1,715236379        |
| 18 | Переменная X 1 | -1172,569661        | 660,0059135               | -1,776604781        |
| 19 | Переменная X 2 | -559,976415         | 206,7214929               | -2,708844673        |
| 20 | Переменная X 3 | 1230,718447         | 627,6020543               | 1,96098537          |
| 21 | Переменная X 4 | -371,3839805        | 218,2128439               | -1,70193456         |
| 22 |                |                     |                           |                     |

Рис.4 Розраховані коефіцієнти математичної моделі

Отримані коефіцієнти копіюємо на аркуш з таблицею, додаємо в таблицю стовпчик Yp (розраховані значення математичної моделі) і вводимо формулу математичної моделі. Пре введенні формули коефіцієнти необхідно вводити зі знаками доларів. Копіюємо формулу для усіх восьми точок (рис. 5).

|    |   |  |         |     |      |          |       |          |   |
|----|---|--|---------|-----|------|----------|-------|----------|---|
| P2 |   | fx = \$K\$11+\$K\$12*L2+\$K\$13*M2+\$K\$14*N2+\$K\$15*O2 |         |     |      |          |       |          |   |
|    | I | J  | K       | L   | M    | N        | O     | P        | Q |
| 1  |   | №  | Y       | X   | X^2  | e^X      | X^3   | Yp       |   |
| 2  |   | 1  | 157     | 0   | 0    | 1        | 0     | 155,9351 |   |
| 3  |   | 2  | 165     | 0,2 | 0,04 | 1,221403 | 0,008 | 168,5355 |   |
| 4  |   | 3  | 182     | 0,4 | 0,16 | 1,491825 | 0,064 | 178,8402 |   |
| 5  |   | 4  | 183     | 0,6 | 0,36 | 1,822119 | 0,216 | 182,3796 |   |
| 6  |   | 5  | 177     | 0,8 | 0,64 | 2,225541 | 0,512 | 177,6417 |   |
| 7  |   | 6  | 164     | 1   | 1    | 2,718282 | 1     | 166,7262 |   |
| 8  |   | 7  | 159     | 1,2 | 1,44 | 3,320117 | 1,728 | 156,1446 |   |
| 9  |   | 8  | 157     | 1,4 | 1,96 | 4,0552   | 2,744 | 157,7971 |   |
| 10 |   |  |         |     |      |          |       |          |   |
| 11 |   | Y-пересечение  | -1074,8 |     |      |          |       |          |   |
| 12 |   | Переменная X 1   | -1172,6 |     |      |          |       |          |   |
| 13 |   | Переменная X 2   | -559,98 |     |      |          |       |          |   |
| 14 |   | Переменная X 3   | 1230,7  |     |      |          |       |          |   |
| 15 |   | Переменная X 4   | -371,38 |     |      |          |       |          |   |
| 16 |   |  |         |     |      |          |       |          |   |

Рис.5 Значення математичної моделі

Додаємо на графік ще один ряд даних. Для цього клацаємо по графіку правою кнопкою миші і обираємо меню „Вихідні дані”. На ярлику „Ряд” клацаємо на кнопку „Додати ряд” і вводимо в поле „Значення” діапазон комірок P2:P9. Знімаємо з ряду 2 маркери, і робимо гладку лінію. Отримана лінія повинна проходити через межі довірчих інтервалів кожної

точки не виходячи за її межі (рис.6). Якщо лінія виходить за межі довірчого інтервалу – необхідно спробувати підставити інші прості функції і повторити попередні дії.

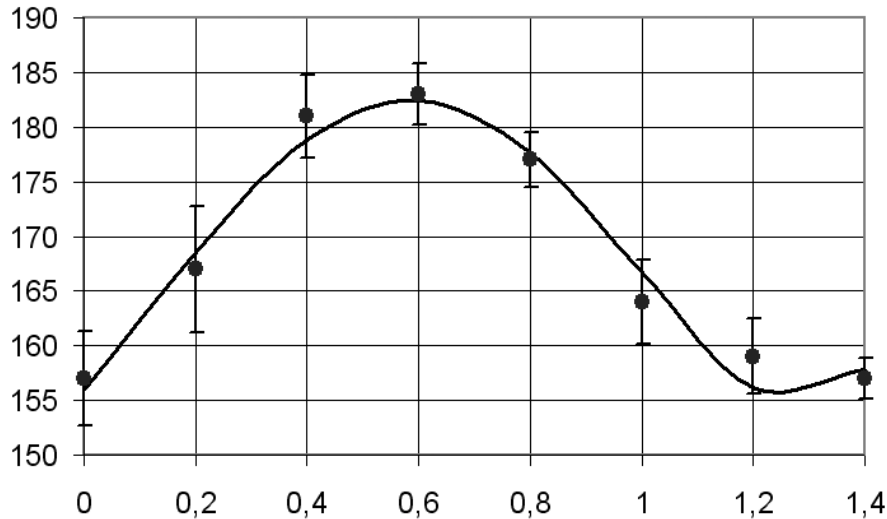


Рис.6 Графік математичної моделі

В нашому випадку лінія не виходить за межі довірчих інтервалів і тому можна переходити до розрахунку адекватності моделі.

Для перевірки адекватності необхідно викликати меню „Сервіс – Аналіз даних – Двохвибірковий F-тест для дисперсії”. В поле „Інтервал змінної 1” необхідно ввести діапазон комірок K2:K9, в поле „Інтервал змінної 2” - ввести діапазон комірок P2:P9 і натиснути „Ок”. З’явиться новий аркуш (рис.7), на якому необхідно знайти значення F-критерію ( $F \approx 1.05$ ) та F-критичне ( $F_{кр} \approx 3.78$ ).

|    | A                                   | B            | C            |
|----|-------------------------------------|--------------|--------------|
| 1  | Двухвыборочный F-тест для дисперсии |              |              |
| 2  |                                     |              |              |
| 3  |                                     | Переменная 1 | Переменная 2 |
| 4  | Среднее                             | 168          | 168          |
| 5  | Дисперсия                           | 121,4285714  | 115,6235001  |
| 6  | Наблюдения                          | 8            | 8            |
| 7  | df                                  | 7            | 7            |
| 8  | F                                   | 1,050206673  |              |
| 9  | P(F<=f) одностороннее               | 0,475068588  |              |
| 10 | F критическое одностороннее         | 3,787050673  |              |

Рис.7 Розрахунок F-критерію

У випадку  $F < F_{кр}$  дисперсії вважаються однаковими. У випадку  $F > F_{кр}$  дисперсії вважаються різними.

Далі необхідно викликати меню „Сервіс – Аналіз даних – Двохвибірковий t-тест з однаковими дисперсіями” (у випадку  $F > F_{кр}$  – з різними). В поле „Інтервал змінної 1” вводимо діапазон комірок K2:K9, в поле „Інтервал змінної 2” вводимо діапазон комірок P2:P9 і натискаємо „Ок”. З’явиться новий аркуш (рис.8), на якому необхідно знайти значення t-статистики ( $t \approx 0$ ) та t-критичне ( $t_{кр} = 1.76$ ).

|    |                             |              |
|----|-----------------------------|--------------|
| 10 | t-статистика                | -6,26548E-14 |
| 11 | P(T<=t) одностороннее       | 0,5          |
| 12 | t критическое одностороннее | 1,76130925   |
| 13 | P(T<=t) двухстороннее       | 1            |
| 14 | t критическое двухстороннее | 2,144788596  |

Рис.8 Розрахунок t-статистики

У випадку  $t < t_{кр}$  отримана математична модель вважається адекватною, у випадку  $t > t_{кр}$  – неадекватною. У випадку неадекватності необхідно повторити розрахунок моделі для інших елементарних функцій.

В нашому випадку математична модель має вигляд:

$$Y = - 1074,8 - 1172,6 \cdot X - 559,98 \cdot X^2 + 1230,7 \cdot e^X - 371,4 \cdot X^3 \quad (1)$$

Отриману математичну модель можна спростити, позбувшись деяких елементарних функцій. Для цього необхідно обрати функцію, яка має найменшу по модулю t-статистику. В нашому випадку найменшу t-статистику має функція  $X^3$  (-1,702).

Видалимо із таблиці даний стовпчик і зробимо перераховані вище операції ще раз (рис.9).

|    | I | J              | K       | L   | M    | N  | O        | P |
|----|---|----------------|---------|-----|------|--|----------|---|
| 1  |   | №              | Y       | X   | X^2  | e^X  | Yp       |   |
| 2  |   | 1              | 157     | 0   | 0    | 1  | 154,0023 |   |
| 3  |   | 2              | 165     | 0,2 | 0,04 | 1,221403                                   | 171,7783 |   |
| 4  |   | 3              | 182     | 0,4 | 0,16 | 1,491825                                   | 179,9585 |   |
| 5  |   | 4              | 183     | 0,6 | 0,36 | 1,822119                                   | 180,351  |   |
| 6  |   | 5              | 177     | 0,8 | 0,64 | 2,225541                                   | 175,1639 |   |
| 7  |   | 6              | 164     | 1   | 1    | 2,718282                                   | 167,0945 |   |
| 8  |   | 7              | 159     | 1,2 | 1,44 | 3,320117                                   | 159,4368 |   |
| 9  |   | 8              | 157     | 1,4 | 1,96 | 4,0552                                     | 156,2147 |   |
| 10 |   |                |         |     |      |  |          |   |
| 11 |   | Y-пересечение  | -12,582 |     |      |  |          |   |
| 12 |   | Переменная X 1 | -51,128 |     |      |  |          |   |
| 13 |   | Переменная X 2 | -222,02 |     |      | = \$K\$11+\$K\$12*L9+\$K\$13*M9+\$K\$14*N9 |          |   |
| 14 |   | Переменная X 3 | 166,58  |     |      |  |          |   |

Рис.9 Розрахунок спрощеної математичної моделі



Побудувавши математичну модель (рис. 10), ще раз розрахувавши F-критерій та t-критерій впевнимося, що спрощена математична модель також є адекватною.

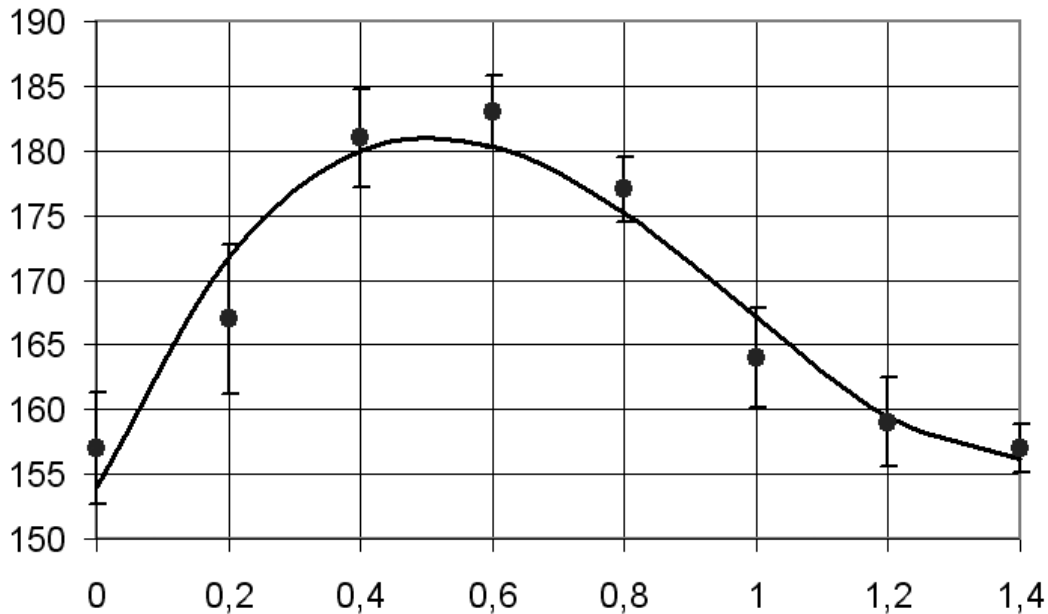


Рис. 10 Спрощена математична модель

Приймаємо кінцевий вигляд математичної моделі, що описує процес впливу кількості модифікатора на тимчасовий опір розриву сплаву АК9ч:

$$Y = - 12,6 - 51,1 \cdot X - 222,0 \cdot X^2 + 166,6 \cdot e^X \quad (2)$$

### Висновки

На прикладі модифікування ливарного алюмінієвого сплаву АК9ч були розглянуті етапи розрахунку математичної моделі за допомогою пакету аналізу MS Excel. При деяких навичках роботи на комп'ютері процес розрахунку, побудови графіків та перевірки адекватності математичних моделей перетворюється на цікавий і швидкий процес.

### Литература

1. Блаттнер П. Использование Microsoft Office Excel 2003. Специальное издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 594 с., ил.